Produs scalar a doi vectori

Matematică - Geometrie

www.enciclopul.ro

1 Operația produs scalar. Proprietăți

Definiția 1. *Definim operația* $\cdot : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ *produsul scalar a doi vectori, cu proprietatea că, dacă* $\overrightarrow{u}$ *și* $\overrightarrow{v}$ *sunt doi vectori din plan, produsul lor scalar* $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ *este numărul real* $|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\cos(\angle\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Teorema 1. *Produsul scalar a doi vectori planari,* $\overrightarrow{\omega}$ *și* $\overrightarrow{\chi}$*, este comutativ, adică:*

$$\overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{\chi} = \overrightarrow{\chi} \cdot \overrightarrow{\omega}$$

Demonstrație. Prin calcul putem observa că:

$$\overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{\chi} = \overrightarrow{\chi} \cdot \overrightarrow{\omega} = |\overrightarrow{\omega}|\,|\overrightarrow{\chi}|\cos(\angle\overrightarrow{\omega}, \overrightarrow{\chi})$$

Teorema 2. *Produsul scalar a doi vectori planari,* $\overrightarrow{\omega}$ *și* $\overrightarrow{\chi}$*, este nul, dacă și numai dacă măcar una din condițiile* $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{\chi} = \overrightarrow{0}$ *și* $\overrightarrow{\omega} \perp \overrightarrow{\chi}$ *este adevărată.*

Demonstrație. Egalăm produsul scalar al celor doi vectori cu zero:

$$\overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{\chi} = 0$$

Folosind definiția:

$$|\overrightarrow{\omega}|\,|\overrightarrow{\chi}|\cos(\angle\overrightarrow{\omega}, \overrightarrow{\chi}) = 0$$

Prin urmare, avem variantele:

$$\begin{cases} |\overrightarrow{\omega}| = 0 \\ |\overrightarrow{\chi}| = 0 \\ \cos(\angle\overrightarrow{\omega}, \overrightarrow{\chi}) = 0 \end{cases}$$

Cu alte vorbe, este adevărată cel puțin una din condiții:

$$\begin{cases} \overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{\chi} = \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{\omega} \perp \overrightarrow{\chi} \end{cases}$$

Teorema 3. *Produsul scalar este distributiv față de suma vectorială, adică, pentru trei vectori planari* $\overrightarrow{\omega}$, $\overrightarrow{\chi}$ *și* $\overrightarrow{\psi}$, *este adevărată relația:*

$$\overrightarrow{\psi} \cdot (\overrightarrow{\omega} + \overrightarrow{\chi}) = \overrightarrow{\psi} \cdot \overrightarrow{\omega} + \overrightarrow{\psi} \cdot \overrightarrow{\chi}$$

Demonstrație. Notăm unghiurile $\hat{u} = \angle\left(\overrightarrow{\psi}, \overrightarrow{\omega}\right)$, $\hat{v} = \angle(\overrightarrow{\omega}, \overrightarrow{\omega} + \overrightarrow{\chi})$ și $\hat{w} = \angle(\overrightarrow{\chi}, \overrightarrow{\omega} + \overrightarrow{\chi})$. Scriem că:

$$\overrightarrow{\psi} \cdot (\overrightarrow{\omega} + \overrightarrow{\chi}) = \left|\overrightarrow{\psi}\right| |\overrightarrow{\omega} + \overrightarrow{\chi}| \cos(\hat{u} + \hat{v})$$

și că:

$$\overrightarrow{\psi} \cdot \overrightarrow{\omega} + \overrightarrow{\psi} \cdot \overrightarrow{\chi} = \left|\overrightarrow{\psi}\right| [|\overrightarrow{\omega}| \cos \hat{u} + |\overrightarrow{\chi}| \cos(\hat{u} + \hat{v} + \hat{w})]$$

Avem, prin urmare, de demonstrat că:

$$|\overrightarrow{\omega} + \overrightarrow{\chi}| \cos(\hat{u} + \hat{v}) = |\overrightarrow{\omega}| \cos \hat{u} + |\overrightarrow{\chi}| \cos(\hat{u} + \hat{v} + \hat{w})$$

În triunghiul vectorial $\Delta(\overrightarrow{\omega}, \overrightarrow{\chi}, \overrightarrow{\omega} + \overrightarrow{\chi})$, aplicăm Teorema sinusurilor:

$$\frac{|\overrightarrow{\omega}|}{\sin \hat{w}} = \frac{|\overrightarrow{\chi}|}{\sin \hat{v}} = \frac{|\overrightarrow{\omega} + \overrightarrow{\chi}|}{\sin(\hat{v} + \hat{w})}$$

Înlocuind, rămâne de demonstrat că:

$$\sin(\hat{v} + \hat{w}) \cos(\hat{u} + \hat{v}) = \sin \hat{w} \cos \hat{u} + \sin \hat{v} \cos(\hat{u} + \hat{v} + \hat{w})$$

Folosind formulele de expansiune trigonometrice:

$$(\sin \hat{v} \cos \hat{w} + \cos \hat{v} \sin \hat{w})(\cos \hat{u} \cos \hat{v} - \sin \hat{u} \sin \hat{v}) = \sin \hat{w} \cos \hat{u} +$$

$$\sin \hat{v}(\cos \hat{u} \cos \hat{v} \cos \hat{w} - \sin \hat{u} \sin \hat{v} \cos \hat{w} - \sin \hat{u} \cos \hat{v} \sin \hat{w} - \sin \hat{u} \sin \hat{v} \cos \hat{w})$$

Adică, calculând, putem ajunge la:

$$\cos \hat{u} \cos^2 \hat{v} \sin \hat{w} = \cos \hat{u} \sin \hat{w} - \cos \hat{u} \sin^2 \hat{v} \sin \hat{w}$$

Prin urmare, avem de demonstrat:

$$\cos^2 \hat{v} = 1 - \sin^2 \hat{v}$$

Care este adevărat, folosind Formula Fundamentală a Trigonometriei.

Teorema 4. *Produsul scalar este asociativ față de produsul vectorilor cu un număr real, adică, dacă avem* $a \in \mathbb{R}$ *și* $\overrightarrow{\omega}, \overrightarrow{\chi} \in \mathcal{V}$, *este adevărată relația:*

$$a(\overrightarrow{\omega} \cdot \overrightarrow{\chi}) = (a\overrightarrow{\omega}) \cdot \overrightarrow{\chi} = \overrightarrow{\omega} \cdot (a\overrightarrow{\chi})$$

Demonstrație. Relația este adevărată din definiție, folosind proprietatea fundamentală, adevărată pentru orice vector $\overrightarrow{\rho}$ și număr real r:

$$|r\overrightarrow{\rho}| = r\,|\overrightarrow{\rho}|$$

Teorema 5. *Produsul scalar al vectorului $\overrightarrow{\varphi}$ cu el însuși este egal cu pătratul modulului acestuia, adică este adevărat că:*

$$\overrightarrow{\varphi}\cdot\overrightarrow{\varphi} = |\overrightarrow{\varphi}|^2$$

Demonstrație. Unghiul dintre un vector și el însuși este:

$$\angle(\overrightarrow{\varphi},\overrightarrow{\varphi}) = 0 \text{ rad}$$

Prin urmare, cosinusul acestui unghi este:

$$\cos(\angle\overrightarrow{\varphi},\overrightarrow{\varphi}) = 1$$

Aplicând definiția:

$$\overrightarrow{\varphi}\cdot\overrightarrow{\varphi} = |\overrightarrow{\varphi}|\,|\overrightarrow{\varphi}|\cos(\angle\overrightarrow{\varphi},\overrightarrow{\varphi})$$

Adică:

$$\overrightarrow{\varphi}\cdot\overrightarrow{\varphi} = |\overrightarrow{\varphi}|^2$$

2 Interpretarea analitică a produsului scalar

Teorema 6. *Fie $\overrightarrow{\varepsilon}$ și $\overrightarrow{\varphi}$ doi vectori în sistemul de coordonate carteziene (sistemul ortogonal) xOy, determinați de expresiile $\overrightarrow{\varepsilon} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ și $\overrightarrow{\varphi} = c\overrightarrow{i} + d\overrightarrow{j}$, unde a,b,c,d$\in\mathbb{R}$ și $\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ sunt versorii axelor de coordonate alese. În aceste condiții, este adevărată relația:*

$$\overrightarrow{\varepsilon}\cdot\overrightarrow{\varphi} = ac + bd$$

Demonstrație. Produsul scalar al celor doi vectori se scrie:

$$\overrightarrow{\varepsilon}\cdot\overrightarrow{\varphi} = \left(a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}\right)\cdot\left(c\overrightarrow{i} + d\overrightarrow{j}\right)$$

Folosind distributivitatea:

$$\overrightarrow{\varepsilon}\cdot\overrightarrow{\varphi} = ac\left|\overrightarrow{i}\right|^2 + bd\left|\overrightarrow{j}\right|^2 + (ad+bc)\left(\overrightarrow{i}\cdot\overrightarrow{j}\right)$$

Din proprietățile versorilor, $\left|\overrightarrow{i}\right| = \left|\overrightarrow{j}\right| = 1$ și $\overrightarrow{i}\perp\overrightarrow{j}$, prin urmare:

$$\overrightarrow{\varepsilon}\cdot\overrightarrow{\varphi} = ac + bd$$

Teorema 7. *Fie* $\overrightarrow{\varepsilon}$ *și* $\overrightarrow{\varphi}$ *doi vectori în sistemul de coordonate carteziene (sistemul ortonormat) Oxyz, determinați de expresiile* $\overrightarrow{\varepsilon} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$ *și* $\overrightarrow{\varphi} = m\overrightarrow{i} + n\overrightarrow{j} + p\overrightarrow{k}$, *unde* $a,b,c,m,n,p \in \mathbb{R}$ *și* $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ *sunt versorii axelor de coordonate alese. În aceste condiții, sunt adevărate relațiile:*

$$\overrightarrow{\varepsilon} \cdot \overrightarrow{\varphi} = am + bn + cp$$

Demonstrație. Produsul scalar se scrie:

$$\overrightarrow{\varepsilon} \cdot \overrightarrow{\varphi} = \left(a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}\right) \cdot \left(m\overrightarrow{i} + n\overrightarrow{j} + p\overrightarrow{k}\right)$$

Adică avem, conform distributivității

$$\overrightarrow{\varepsilon} \cdot \overrightarrow{\varphi} = am\left|\overrightarrow{i}\right|^2 + bn\left|\overrightarrow{j}\right|^2 + cp\left|\overrightarrow{k}\right|^2 +$$

$$+ (an + bm)\left(\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j}\right) + (ap + cm)\left(\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{k}\right) + (bp + cn)\left(\overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{k}\right)$$

Folosind proprietățile versorilor:

$$\overrightarrow{\varepsilon} \cdot \overrightarrow{\varphi} = am + bn + cp$$

Ceea ce trebuia demonstrat.

Definiția 2. *Un vector* **a** *este un set de* $n \geq 1$ *numere reale, nu neapărat distincte, ale căror ordine este importantă. Notăm* $\mathbf{a} = [1,2,3]$ *un vector cu trei elemente.*

Definiția 3. *Numărul de elemente ale unui vector* **a** *se numește dimensiunea vectorului* **a**.

Proprietatea 1. *Orice vector* **d** *de dimensiune* 2 *are un vector* $\overrightarrow{d}$ *planar corespunzător (între mulțimea* $\mathcal{V}_{\mathcal{P}}$ *a vectorilor planari și* $\mathbb{R}^2$, *mulțimea vectorilor de dimensiune* 2 *există o bijecție).*

Proprietatea 2. *Orice vector* **t** *de dimensiune* 3 *are un vector* $\overrightarrow{t}$ *spațial corespunzător (între mulțimea* $\mathcal{V}_{\mathcal{S}}$ *a vectorilor spațiali și* $\mathbb{R}^3$, *mulțimea vectorilor de dimensiune* 3 *există o bijecție).*

Definiția 4. *Dacă avem doi vectori de aceeași dimensiune notată cu n, fie aceștia* **a** *și* **b**, *definiți cu valorile* $\mathbf{a} = [a_1,a_2,\ldots,a_n]$ *și* $\mathbf{b} = [b_1,b_2,\ldots,b_n]$, *numim suma lor vectorul de dimensiune n, pentru care*

$$\mathbf{s} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = [a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n]$$

.

Observație. Suma a doi vectori $\overrightarrow{a}$ și $\overrightarrow{b}$ din plan este un caz particular al sumei a doi vectori algebrici. Dacă avem $\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j}$ și $\overrightarrow{b} = \gamma\overrightarrow{i} + \delta\overrightarrow{j}$, atunci $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = (\alpha + \gamma)\overrightarrow{i} + (\beta + \delta)\overrightarrow{j}$. Această construcție ilustrează suma vectorilor bidimensionali $\mathbf{a} = [\alpha,\beta]$ și $\mathbf{b} = [\gamma,\delta]$.

Definiția 5. *Dacă avem un vector de dimensiune n, fie acesta* $\mathbf{a}$*, definit cu valorile* $\mathbf{a} = [a_1,a_2,\ldots,a_n]$ *și un scalar real m, numim vectorul produs al vectorului* $\mathbf{a}$ *cu scalarul m acel vector de dimensiune n pentru care* $\mathbf{p} = m\mathbf{a} = [ma_1,ma_2,\ldots,ma_n]$.

Observație. Produsul cu un scalar m al vectorului planar $\overrightarrow{a}$ este un caz particular al produsului unui vector algebric cu un scalar. Dacă avem $\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j}$, atunci $m\overrightarrow{a} = m\alpha\overrightarrow{i} + m\beta\overrightarrow{j}$. Această construcție ilustrează produsul vectorului bidimensional $\mathbf{a} = [a,b]$ cu scalarul real m.

Definiția 6. *Dacă avem doi vectori de aceeași dimensiune notată cu n, fie aceștia* $\mathbf{a}$ *și* $\mathbf{b}$*, definiți cu valorile* $\mathbf{a} = [a_1,a_2,\ldots,a_n]$ *și* $\mathbf{b} = [b_1,b_2,\ldots,b_n]$*, numim produsul lor scalar numărul real pentru care este adevărată relația* $p = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$.

Observație. Produsul scalar a doi vectori $\overrightarrow{a}$ și $\overrightarrow{b}$ din plan este un caz particular al produsului scalar al doi vectori algebrici. Dacă avem $\overrightarrow{a} = \alpha\overrightarrow{i} + \beta\overrightarrow{j}$ și $\overrightarrow{b} = \gamma\overrightarrow{i} + \delta\overrightarrow{j}$, atunci $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \alpha\gamma + \beta\delta$. Această construcție ilustrează produsul scalar al vectorilor bidimensionali $\mathbf{a} = [\alpha,\beta]$ și $\mathbf{b} = [\gamma,\delta]$.

3 Probleme de perpendicularitate – demonstrații vectoriale

Problema !1. *Fie ΔABC un triunghi, cu I centrul său înscris. Fie $AI \cap BC = \{D\}$. Mediatoarea lui (AD) intersectează dreapta BI în punctul E. Demonstrați că $ED \perp CI$.*

Forumurile Art of Problem Solving

Indicație. Exprimă $\overrightarrow{CI}$ vectorial, folosind relația vectorială a bisectoarei în ΔACD. Exprimă $\overrightarrow{ED}$ vectorial în funcție de segmentele cu relații vectoriale cunoscute în ΔABC. Folosește distributivitatea produsului scalar, pentru a demonstra că $\overrightarrow{ED}\cdot\overrightarrow{CI} = 0$.

Problema *2. *Fie $\mathcal{C}_1$ și $\mathcal{C}_2$ cu centrele O_1 și O_2, secante în A și B. În aceste condiții, este adevărată relația $AB \perp O_1O_2$.*

Teorema Axei Radicale

Soluție. Pentru a demonstra că $AB \perp O_1O_2$, este suficient să arătăm că $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{O_1O_2} = 0$. Calculăm că:

$$2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO_1} - \overrightarrow{BO_1} + \overrightarrow{AO_2} - \overrightarrow{BO_2}$$

Și, în mod asemănător, calculăm:

$$2\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{AO_2} + \overrightarrow{BO_2} - \overrightarrow{AO_1} - \overrightarrow{BO_1}$$

După calcule ajungem la:

$$2\overrightarrow{AB} \cdot 2\overrightarrow{O_1O_2} = \left(AO_1^2 - AO_2^2\right) + \left(BO_1^2 - BO_2^2\right)$$

Dar, din condițiile de raze:

$$4\left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{O_1O_2}\right) = 0$$

Prin urmare:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{O_1O_2} = 0$$

Ceea ce trebuia demonstrat.

Problema 3. *Se consideră ΔABC, în care $m(\angle A) = 90$, $m(\angle B) = 30$, iar D este piciorul înălțimii din A. Fie punctul $E \in (AD)$ astfel încât $DE = 3AE$ și F piciorul perpendicularei din D pe dreapta BE. Arătați că $AF \perp FC$.*

Olimpiada de Matematică, etapa finală, 2017, clasa a VII-a

Soluție. Trebuie să demonstrăm că:

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{FC} = 0$$

Conform distributivității, rămâne de demonstrat:

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

Din $AD \perp BC$ și $DF \perp FB$, $BC = 2AC$ și $AD = 4DE$, calculând, obținem concluzia.

Problema 4. *Fie ΔABC un triunghi dreptunghic în A. Bisectoarea unghiului ACB intersectează latura (AB) în punctul D și perpendiculara în B pe BC în punctul E. Notăm cu F simetricul lui E față de B și cu P intersecția dreptelor DF și BC. Demonstrați că $EP \perp CF$.*

Olimpiada de Matematică, etapa finală, 2016, clasa a VI-a

Indicație. Se calculează produsul scalar $\overrightarrow{EP} \cdot \overrightarrow{CF}$, folosindu-se distributivitatea și relațiile de perpendicularitate $AB \perp AC$ și $EF \perp BC$, și se demonstrează egalitatea sa cu 0. Sintetic, se demonstrează că P este ortocentru în ΔABC.

4 Extindere – produsul vectorial, produsul triplu scalar, produsul triplu vectorial

Definiția 7. *Definim operația $\times$: $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, cu proprietatea că, dacă $\overrightarrow{u}$ și $\overrightarrow{v}$ sunt doi vectori în spațiu, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ este un vector definit de:*

- *Modulul $|\overrightarrow{w}| = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{v}| \cdot \sin(\angle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, egal cu aria paralelogramului determinat de $\overrightarrow{u}$ și $\overrightarrow{v}$;*

- *Direcția* $\delta(\overrightarrow{w}) \perp \delta(\overrightarrow{u})$ *și* $\delta(\overrightarrow{w}) \perp \delta(\overrightarrow{v})$, *adică* $\delta(\overrightarrow{w}) \perp (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$;
- *Sensul* $\sigma(\overrightarrow{w})$ *determinat de regula mâinii drepte – degetele arătător și mijlociu trebuie orientate de-a lungul lui* $\overrightarrow{u}$ *și* $\overrightarrow{v}$, *iar degetul mare indică sensul vectorului produs vectorial.*

Proprietatea 3. *Între versorii* $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ *ai unui sistem ortonormat sunt adevărate relațiile:*

- $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}$;
- $\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{j} = -\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{i} = \overrightarrow{k}$;
- $\overrightarrow{j} \times \overrightarrow{k} = -\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{j} = \overrightarrow{i}$;
- $\overrightarrow{k} \times \overrightarrow{i} = -\overrightarrow{i} \times \overrightarrow{k} = \overrightarrow{j}$.

Proprietatea 4. *Operația produs vectorial are relațiile:*

- $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}$, *relația de anticomutativitate;*
- $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$, *consecință a relației anterioare;*
- $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{w}$, *distributivitate față de suma vectorială;*
- $\sum_{cyc} \overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{0}$, *identitatea lui Jacobi.*

Definiția 8. *Produsul triplu scalar a trei vectori se definește ca* $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{v} \cdot (\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{u}) = \overrightarrow{w} \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})$ *și reprezintă volumul (cu semn) al paralelipipedului determinat de cei trei vectori.*

Definiția 9. *Produsul triplu vectorial a trei vectori se definește ca* $\overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}) \times \overrightarrow{v} - (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w}$ *și reprezintă o aplicație geometrică a algebrei analitice.*